О РЕЗОНАНСНОЙ СТРУКТУРЕ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ

А. М. МОЛЧАНОВ

В нашей ранней работе[1] высказана гипотеза о резонансной структуре Солнечной системы. Она вытекает из более общей гипотезы о том, что эволюционно зрелые колебательные системы неизбежно резонансны, а их строение задано (подобно квантовым системам) набором целых чисел. Отсюда возникает интересный вопрос о возможных структурах планетных систем.

Однако резонансные соотношения выполнены, конечно, не вполне точно, а с некоторой невязкой. Так как любые действительные числа

[1] *А. М. Молчанов.* Докл. АН СССР, 1966, **168**, № 2.

Современные проблемы небесной механики и астродинамики.
М.: Наука, 1973.

можно приближенно представить рациональными с произвольной точностью, то остается неясным главный вопрос: какой смысл имеет утверждение о резонансности?

В настоящей статье делается попытка количественно оценить степень достоверности резонансного строения. Показано, что случайное возникновение подобной структуры малоправдоподобно, так как его «вероятность» оценивается числом заведомо меньшим чем 10^{-11}.

1. Невозмущенная система

Строго говоря, задача о резонансности должна ставиться следующим образом.

Дана многочастотная колебательная система, содержащая малый параметр ε:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(\mathbf{I}) + \varepsilon\Omega(\mathbf{I}, \varphi, \varepsilon),$$
$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \varepsilon\mathbf{F}(\mathbf{I}, \varphi, \varepsilon), \tag{1}$$

где $\varphi = \{\varphi_i\}$ — вектор фаз, $\mathbf{I} = \{I_k\}$ — система первых интегралов невозмущенной системы, возникающей при $\varepsilon=0$. Правые части системы (1) периодичны с периодом 2π по каждой из фаз.

Далее следовало бы найти резонансные решения системы (1) и показать, что данные наблюдений соответствуют решению с той точностью, с которой вообще имеет смысл рассмотрение небесномеханического приближения. Однако сейчас такая задача весьма далека не только от решения, но даже от правильной постановки.

Всюду дальше рассматривается только невозмущенная система

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(\mathbf{I}), \qquad \frac{d\mathbf{I}}{dt} = 0, \tag{2}$$

и поэтому рассмотрение носит эвристический, вероятностный характер. Необходимо все же сохранить одно важное требование, вытекающее из свойств полной системы, — разрешаются только такие преобразования[1] фазовых переменных, которые сохраняют периодичность правых частей. Как можно проверить, это равносильно требованию, чтобы замена переменных имела вид

$$\psi = A\varphi, \tag{3}$$

где A — целочисленная матрица, имеющая определитель, равный единице (унимодулярность).

Заметим, что состояние невозмущенной системы полностью определяется заданием вектора частот ω, преобразующегося по аналогичной формуле

$$\nu = A\omega. \tag{4}$$

[1] Не следует упускать из виду, что новые фазы в конкретном случае Солнечной системы уже не допускают непосредственной геометрической интерпретации в качестве угла, образованного направлением на планету и фиксированным направлением. Впрочем, строго говоря, в систему (1) входят средние аномалии, совпадающие с истинными лишь при движении по окружности. Но каждая средняя аномалия относится все же только к одной планете. В новых переменных возникают фазы типа «минус угол Меркурия плюс угол Венеры плюс два угла Земли плюс угол Марса», и от наглядного истолкования приходится отказаться. Зато теоретическое исследование существенно упрощается.

Введение этих преобразований позволяет наиболее просто охарактеризовать все максимально резонансные системы. В самом деле, рассмотрим вектор ν, имеющий только одну[1] ненулевую компоненту:

$$\nu_1=0, \quad \nu_2=0, \quad \dots, \quad \nu_n=\nu\neq 0. \tag{5}$$

Возьмем теперь произвольную целочисленную унимодулярную матрицу A и построим вектор ω при помощи матрицы, обратной к A (она также будет целочисленной, ибо детерминант A равен единице):

$$\omega = A^{-1}\nu. \tag{6}$$

Из формул (4) и (5) ясно, что матрица A (кроме последней строки) составлена из коэффициентов резонансных соотношений. Формула же (6) показывает, что все частоты ω_i — целые кратные величины ν.

Итак, каждая целочисленная унимодулярная матрица A и число ν порождают резонансный вектор ω. Наоборот, любой резонансный вектор ω допускает, как показано автором ранее, представление вида (6).

2. Постановка задачи

Приведенное выше описание облегчает количественную постановку вопроса о степени достоверности факта максимальной резонансности.

Основная цель ясна: если системы, подобные Солнечной, встречаются редко, то это не может быть случайностью. Тогда резонансное строение — объективный факт и требует эволюционного объяснения.

Нужно, однако, придать точный смысл словам «редко» и «подобные».

Понятие «редкость» наиболее естественно истолковать в духе теории меры как принадлежность ко множеству малой меры. Но фазовый объем неудобно рассматривать в качестве меры, так как резонансность системы сохраняется при изменении масштаба, а объем всего пространства бесконечен. Поэтому в дальнейшем используется «относительная» мера

$$d\mu = \prod_i{}' \frac{d\omega_i}{\omega_i} \tag{7}$$

и конечный куб в пространстве логарифмов частот. Более точно рассматривается пространство относительных частот (так как одну из частот можно сделать единицей), размерность которого на единицу меньше числа частот и равна числу резонансных соотношений. Использование величины

$$\Delta\mu = \prod_i{}' \frac{\Delta\omega_i}{\omega_i} \tag{8}$$

тем более естественно, что именно ею наиболее разумно измерять степень близости реального вектора к теоретическому (точно: резонансному) вектору. Штрих у знака произведения означает, конечно, пропуск той частоты, которая выбрана за единицу.

Еще более важным является определение термина «подобные Солнечной системе». Дело в том, что максимально резонансные системы образуют всюду плотное множество, и, «размазывая» каждую точку этого счетного множества по параллелепипеду (8), мы получим все фазовое пространство. Однако четыре матрицы, описывающие строение планетной системы и систем спутников Юпитера, Сатурна и Урана, обладают важными отличительными особенностями, которые интуитив-

[1] Аналогично можно изучать системы, у которых число резонансов на две единицы меньше, чем число фаз. В этом случае вектор ν имеет две отличные от нуля несоизмеримые компоненты.

но можно охарактеризовать словами «почти треугольные» с «небольшими» коэффициентами. Это позволяет высказать эвристическое, несомненно дискуссионное предположение о принадлежности их весьма узкому классу «хорошо резонансных» систем. Точный смысл слов, взятых в кавычки, определен ниже конкретно для каждой из систем.

Общая схема вычисления редкости r данной системы выглядит следующим образом.

Изучаемая реальная система и приближающая ее идеальная, теоретическая, порождают параллелепипед в пространстве логарифмов частот, если первую взять в качестве вершины, а вторую — в качестве центра. Точно такой же окрестностью окружаются все остальные, «столь же хорошо резонансные» системы. Получается множество систем «не хуже» данной, и вычисляется его объем.

В том же пространстве строится «объемлющий куб» системы, каждая сторона которого определяется разностью

$$a = \ln \omega_{\max} - \ln \omega_{\min}. \tag{9}$$

Его объем есть просто a^{n-1}. Отношение r этих двух объемов и принимается за количественную меру редкости изучаемой системы. Так как окрестности идеальных точек могут пересекаться, а сами точки могут располагаться вне объемлющего куба, то для r имеет место очевидная оценка

$$r \leqslant N \frac{2^{n-1}\,\Delta\mu}{a^{n-1}}, \tag{10}$$

где $\Delta\mu$ — величина, задаваемая формулой (8), множитель 2^{n-1} возникает из-за равноправия отклонений вправо и влево, а N — число матриц A, столь же «хороших», как изучаемая.

3. «Хорошие» матрицы

Структурная матрица планетной системы содержит классический резонанс 2:5 периодов Юпитера и Сатурна и выглядит следующим образом:

$$A_{\text{кл}} = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 5 & 1 \end{matrix} \right\| . \tag{11}$$

Однако, кроме резонансного соотношения

$$2\omega_{\text{Юп}} - 5\omega_{\text{Сат}} \approx 0, \tag{12}$$

можно указать и другое:

$$\omega_{\text{Юп}} - 2\omega_{\text{Сат}} - \omega_{\text{Ур}} - \omega_{\text{Пл}} \approx 0, \tag{13}$$

выполняющееся даже немного[1] точнее, чем классическое.

[1] 0,0135 — невязка классического соотношения, 0,0059 — нового. Более правильно, однако, сравнивать относительные ошибки, равные 0,0067 и 0,0059 соответственно.

Заменив пятую строку коэффициентами соотношения (13), вторую — разностью второй и третьей, а шестую — линейной комбинацией четырех последних резонансных соотношений, можно построить другую структурную матрицу планетной системы:

$$A_{\text{нов}} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix}. \qquad (14)$$

Теоретические векторы частот, порожденные этими двумя матрицами, аппроксимируют реальный вектор одинаково хорошо. Табл. 1 показывает это с полной несомненностью.

Таблица 1

Частоты планетной системы

Планета	$\omega_{\text{набл}}$	$\omega_{\text{кл}}$	$\frac{\omega_{\text{набл}} - \omega_{\text{кл}}}{\omega_{\text{набл}}}$	$\omega_{\text{нов}}$	$\frac{\omega_{\text{набл}} - \omega_{\text{нов}}}{\omega_{\text{набл}}}$
Меркурий	49,251	49,200	0,0010	49,190	0,0012
Венера	19,282	19,257	0,0013	19,262	0,0010
Земля	11,862	11,829	0,0028	11,833	0,0024
Марс	6,3067	6,2857	0,0033	6,2857	0,0033
Юпитер	1,0000	1,0000	—	1,0000	—
Сатурн	0,4027	0,4000	0,0067	0,4048	−0,0051
Уран	0,14119	0,14286	−0,0117	0,14286	−0,0117
Нептун	0,07198	0,07143	0,0078	0,07143	0,0078
Плутон	0,4750	0,04762	−0,0025	0,04762	−0,0025

Следовательно, теоретическая возможность пересечения окрестностей идеальных точек реализуется уже для планетной системы.

Естественный вопрос: какая же из матриц правильная? — не имеет смысла (как уже было отмечено) в рамках невозмущенных уравнений и требует изучения полной системы. Скорее всего, плохи оба варианта, так как они не учитывают бросающейся в глаза иерархии строения планетной системы, явно состоящей по крайней мере из двух групп. Внутренняя группа каменных планет заканчивается Марсом, который отделен от Юпитера, начинающего внешнюю группу газовых планет, частотным интервалом более чем в две «октавы».

Оба варианта структурной матрицы планетной системы имеют плюсы и минусы. Первая матрица приводит к более простым рациональным приближениям для частот, зато вторая значительно ближе по важнейшим свойствам к структурным матрицам систем спутников. Последнее обстоятельство является решающим, так как удается достаточно единообразно определить классы «хорошо резонансных» систем и найти количество систем «не хуже данной» в каждом из четырех случаев. Неизбежное, по-видимому, уточнение в будущем принципов строения планетной системы (а также, вероятно, систем спутников) будет означать сужение класса «столь же хороших» систем и может, следовательно, только усилить развиваемую аргументацию.

Сравнение структурных матриц систем спутников

$$A_{\text{Сат}} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{Vmatrix}, \tag{15}$$

$$A_{\text{Ур}} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 2 \end{Vmatrix}, \tag{16}$$

$$A_{\text{Юп}} = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{Vmatrix} \tag{17}$$

выявляет общее свойство «почти треугольности», заставляющее отдать предпочтение матрице $A_{\text{нов}}$ перед матрицей $A_{\text{кл}}$ и служащее основой определения классов «хороших» матриц.

Во всех четырех случаях A есть разность двух матриц — «скелетной» части S и «треугольной» T:

$$A = S - T. \tag{18}$$

Матрица S в блочной записи имеет вид

$$S = \begin{Vmatrix} E & 0 \\ 0 & \sigma \end{Vmatrix}, \tag{19}$$

где σ — унимодулярная матрица третьего порядка (и даже второго для спутников Юпитера), а E — единичная матрица в дополнительном к σ пространстве. Матрица T имеет нули на главной диагонали (где стоят единицы матрицы S), всюду ниже диагонали, а также на местах, занятых матрицей σ. Иными словами, всюду, где S не нуль, там нуль T, и наоборот. В этом смысле A есть не просто разность, а наложение матриц S и $-T$. Матрица A ниже диагонали может иметь не больше трех ненулевых элементов, входящих в матрицу σ. Это объясняет название «почти треугольные» для таких матриц.

К сожалению, второе важное свойство «хороших» матриц — иметь «небольшие» коэффициенты — не удается сформулировать достаточно общим образом.

Описательно это свойство выглядит так. Треугольные части состоят в основном из нулей и единиц и содержат небольшое количество двоек[1]. Тройки, четверки, пятерки и семерки (единственная на всю Солнечную систему) локализованы в «головках» скелетных частей структурных матриц. Кроме того, ненулевые элементы треугольных частей тяготеют к главной диагонали и имеют тенденцию быть положительными. Эти свойства будут видны яснее, если выписать отдельно «головки» σ и отдельно треугольные части T, откинув в них все заведомо нулевые элементы (σ и T без индекса относятся к планетной системе):

$$\sigma = \left\| \begin{matrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix} \right\|; \quad \sigma_{\text{Сат}} = \left\| \begin{matrix} 3 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 4 \end{matrix} \right\|; \quad \sigma_{\text{Ур}} = \left\| \begin{matrix} -2 & 1 & 5 \\ 1 & -6 & 6 \\ -2 & 3 & 2 \end{matrix} \right\|;$$

$$\sigma_{\text{Юп}} = \left\| \begin{matrix} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{matrix} \right\|; \tag{20}$$

$$T = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ & & & 6 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ & & & & 2 & 1 & 0 & 1 \\ & & & & & 2 & 1 & 1 \end{matrix} \right\|; \tag{21}$$

$$T_{\text{Сат}} = \left\| \begin{matrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ & & & 2 & -1 & 0 & -1 \\ & & & & 2 & 2 & 0 \end{matrix} \right\|; \tag{22}$$

$$T_{\text{Ур}} = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 2 & -1 \end{matrix} \right\|; \tag{23}$$

$$T_{\text{Юп}} = \left\| \begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 \end{matrix} \right\|; \tag{24}$$

4. Число «хороших» матриц

Несомненная общность «анатомии» структурных матриц делает оправданным определение систем «не хуже данной» в терминах T и σ. По самому смыслу этого понятия формулировка должна быть основана на свойствах матриц T и σ конкретной изучаемой системы.

[1] Единственное исключение, причем сразу шестерка, как раз и наводит на мысль о неблагополучии в понимании принципа строения планетной системы. Нужно как-то учесть иерархию, но как это сделать, пока не ясно.

Планетная система. Из свойств матрицы (21) вытекают следующие требования на T.

1. Вне трех диагоналей, примыкающих к главной, может стоять не более трех единиц. Остальные 12 элементов — нули.

2. Отрицательных элементов может быть не более двух.

3. Только на одном месте может стоять число, большее двух, но меньшее семи.

Матрица σ полностью определяется двумя строками (шесть элементов). В случае планетной системы достаточно узкий класс выделяется двумя требованиями.

1. Не менее четырех мест заняты единицами и нулями.

2. Любой элемент не больше шести.

Хотя любая «хорошая» матрица A порождает «хорошие» матрицы T и σ, обратное верно не всегда. «Хорошие» по виду матрицы A могут давать идеальные векторы с отрицательными частотами (вращение части планет в противоположном направлении) или частотами, выходящими за границы «объемлющего куба системы». Поэтому общее количество N систем «не хуже данной» имеет оценку сверху

$$N \leqslant N_T N_\sigma . \tag{25}$$

Перейдем к оценке N_T. Из 18 мест, которые имеются на трех диагоналях матрицы, одно может быть занято числами от трех до семи, а остальные места предназначены для нулей, единиц и двоек. Поэтому полное число способов n_1, которыми можно заполнить все вакансии:

$$n_1 = \frac{18!}{1!\ 17!}\ 5^1 \cdot 3^{17} = 1{,}16 \cdot 10^{10}. \tag{26}$$

Три единицы на 15 свободных местах в верхнем углу матрицы T порождают n_2:

$$n_2 = \frac{15!}{3!\ 12!} = 455 \tag{27}$$

различных возможностей.

Остается сделать отрицательными два числа. Всего претендентов не больше $18+3=21$, поэтому число возможностей не больше n_3:

$$n_3 = \frac{21!}{2!\ 19!} = 210. \tag{28}$$

Перемножая эти числа, получим оценку количества «хороших» матриц T

$$N_T = n_1 n_2 n_3 = 1{,}1 \cdot 10^{15}. \tag{29}$$

Оценка количества «хороших» матриц σ проводится аналогично. На четырех местах нули и единицы, а на двух — положительные и отрицательные числа от двух до шести. Следовательно, на четыре места имеется по три претендента (отрицательный нуль — это все равно нуль), а на два места — по десять претендентов. Итого[1]:

$$N_\sigma \leqslant \frac{1}{16} \cdot \frac{6!}{4!\ 2!}\ 3^4 \cdot 10^2 = 7{,}6 \cdot 10^3. \tag{30}$$

Полное число «хороших» матриц A оценивается громадным числом N:

$$N < 8{,}4 \cdot 10^{18}. \tag{31}$$

[1] Лишь четвертая часть всех матриц σ порождает положительные частоты. Еще вчетверо уменьшает число возможностей изменение знаков двух верхних строк матрицы σ.

Спутники Сатурна. В этом случае в матрице T выделены две диагонали, в углу — три отличных от нуля элемента и число минусов равно двум. Рассуждения, вполне аналогичные проведенным, дают

$$n_1=3^{10}=5{,}9\cdot10^4, \tag{32}$$

так как нет чисел, больших чем два.

Далее,

$$n_2=\frac{15!}{3!\ 12!}\cdot2^3=3640, \tag{33}$$

где множитель 2^3 появился из-за того, что в углу матрицы T могут стоять не только единицы, но и двойки.

Учет знаков дает множитель n_3:

$$n_3=\frac{13\cdot12}{1\cdot2}=78. \tag{34}$$

Следовательно,

$$N_T=n_1n_2n_3=1{,}68\cdot10^{10}. \tag{35}$$

Несколько изменилось распределение мест и в матрице σ, что приводит к такой оценке:

$$N_\sigma=\frac{1}{16}\cdot\frac{6!}{3!\,3!}3^3\cdot10^3=3{,}4\cdot10^4. \tag{36}$$

Окончательно

$$N_{\text{Сат}}<5{,}7\cdot10^{14}. \tag{37}$$

Спутники Урана. В матрице T нет выделенных диагоналей и поэтому не выделяются два множителя: n_1 и n_2. Отрицательное число всего одно и всего одна двойка, остальные — нули и единицы. Следовательно, на шесть мест из семи претендуют нули и единицы, на одно место — двойка, и где-то надо поставить один минус. Это приводит к оценке

$$N_T=7\cdot7\cdot2^6=3136. \tag{38}$$

Матрица σ устроена сложнее всего. На трех местах нули, единицы и двойки (что с учетом изменения знака дает пять претендентов), а на других трех — от тройки до шестерки (восемь претендентов). Итого:

$$N_\sigma=\frac{1}{16}\cdot\frac{6!}{3!\ 3!}\cdot5^3\cdot8^3=8\cdot10^{14}. \tag{39}$$

Окончательно

$$N_{\text{Ур}}<2{,}5\cdot10^8. \tag{40}$$

Спутники Юпитера. В матрице T имеется пять мест, на каждое из них не больше пяти претендентов — нули, единицы и двойки (положительные и отрицательные). Итого:

$$N_T=5^5=3125. \tag{41}$$

В матрице σ всего два существенных места, но зато есть семерка. Следовательно,

$$N_\sigma=7^2=49. \tag{42}$$

Значит,

$$N_{\text{Юп}}<1{,}53\cdot10^5. \tag{43}$$

5. Редкость «хороших» систем

В предыдущем пункте вычислено количество «хороших» систем, оказавшееся поистине грандиозным. Тем не менее общий объем, занимаемый в пространстве логарифмов частот всеми системами «не хуже планетной», составляет весьма малую долю объемлющего куба. Из табл. 1 находим

$$\Delta\mu = 1{,}1 \cdot 10^{-20}; \tag{44}$$

$$a = 6{,}96, \quad (a/2)^8 = 2{,}1 \cdot 10^4 \tag{45}$$

и, подставляя эти числа в оценку (10) для r, получаем окончательно

$$r \leqslant 1{,}7 \cdot 10^{-5}. \tag{46}$$

Заметим, что эта оценка дает редкость только самой планетной системы. Для оценки редкости всей Солнечной системы нужно перемножить, по крайней мере, четыре числа, оценивающие редкость системы планет и трех систем спутников.

Необходимые для оценок значения чисел $\Delta\mu$ и a можно получить из таблицы теоретических и реальных частот[1] систем спутников (табл. 2).

Таблица 2

Частоты спутников планет

Спутник	$\omega_{набл}$	$\omega_{теор}$	$\frac{\omega_{набл}-\omega_{теор}}{\omega_{набл}}$	Спутник	$\omega_{набл}$	$\omega_{теор}$	$\frac{\omega_{набл}-\omega_{теор}}{\omega_{набл}}$
Спутники Сатурна				*Спутники Урана*			
				Миранда	6,529	6,588	—0,0090
				Ариель	3,454	3,471	—0,0049
				Умбриель	2,100	2,118	—0,0086
Мимас	16,918	16,800	0,0070	Титания	1,000	1,000	—
Энцелад	11,639	11,600	0,0034	Оберон	0,6466	0,6471	—0,0008
Феба	8,448	8,400	0,0057	*Спутники Юпитера*			
Диана	5,826	5,800	0,0086				
Рея	3,530	3,500	0,0086	Ио	4,044	4,000	0,0110
Титан	1,000	1,000	—	Европа	2,015	2,000	0,0075
Гиперион	0,7494	0,7500	—0,0008	Ганимед	1,000	1,000	—
Япет	0,2010	0,2000	0,0050	Каллисто	0,4288	0,4285	0,0007

Вычисления приводят к следующим результатам:

$$r_{Сат} < 1{,}8 \cdot 10^{-4}, \tag{47}$$

$$r_{Ур} < 7{,}2 \cdot 10^{-2}, \tag{48}$$

$$r_{Юп} < 6{,}3 \cdot 10^{-3}. \tag{49}$$

Поэтому окончательная оценка редкости Солнечной системы дается весьма малым числом

$$r_{\odot} < 1{,}4 \cdot 10^{-12}. \tag{50}$$

Чтобы оценить полученный результат, заметим, что число звезд в нашей Галактике порядка 10^{11}. Даже если каждую звезду снабдить планетной системой, то потребуется несколько галактик, чтобы получить случайным образом хотя бы одну систему, подобную Солнечной. В настоящее время люди не рискуют, по-видимому, настаивать на такой

[1] В каждой системе свой масштаб частот, задаваемый для определенности частотой наиболее массивного тела.

степени своей исключительности. Наблюдаются скорее противоположные тенденции.

Приведенные рассуждения, не являясь, конечно, строгим доказательством, на роль которого может претендовать лишь строгая теория резонансных состояний полной системы, делают все же весьма сомнительной применимость к Солнечной системе теории возмущений гамильтоновых систем. Эта теория, возникшая именно из небесной механики и ставшая одной из самых интересных ветвей математики, основана на гипотезе «общего положения» вектора частот системы.

Основной задачей настоящей работы была попытка показать прямую противоположность фактического положения дел в Солнечной системе. Если это так, то метрический аспект теории возмущений является, видимо, абстракцией, не имеющей отношения к задаче, из которой он возник (что, конечно, не мешает ему быть весьма полезным в других областях).

«Grau, teurer Freund, ist alle Theorie
Und grün des Lebens goldner Baum».

(*Göthe*. Faust)

Представление об аморфности структуры (квинтэссенцией которого и является метрический подход) дезориентирует исследователя в задаче изучения Солнечной системы, главная черта которой — эволюционная зрелость.